

STABILNOŚĆ SŁUPÓW ZESPOLONYCH PRZY ZMIENNYCH OBCIĄŻENIACH

Rafał DOMAGAŁA ¹⁾, Jan KUBIK ²⁾

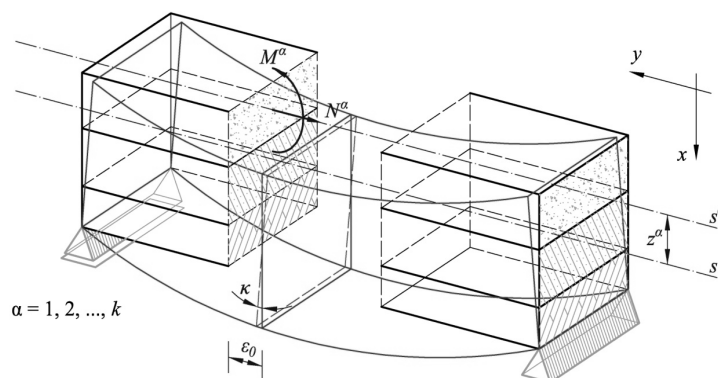
¹⁾ Politechnika Śląska, Gliwice; ²⁾ Politechnika Opolska, Opole

1. Wstęp

W zakresie zadań liniowo-sprężystych metody mechaniki budowli uzyskały pełny rozwój dając inżynierowi poręczne i skuteczne metody. Zgoła inaczej przedstawia się problem, jeżeli analizowana konstrukcja składa się z kilku warstw i na dodatek z materiałów posiadających właściwości reologiczne. Brakuje wówczas metod obliczeń konstrukcji. Dlatego też w artykule przedstawione zostaną równania stabilności słupów zespolonych wykonanych z materiałów sprężystych i lepkosprężystych.

2. Założenia

W pracy przyjęto, że pręt w całości spełnia wszystkie założenia klasycznej, technicznej teorii zginania prętów prostych, tj. m.in. hipotezę płaskich przekrojów oraz założono, że przekrój posiada przynajmniej jedną oś symetrii prostopadłą do wektora momentu zginającego. Posłużono się modelem warstwowego pręta statycznie wyznaczalnego, którego przekrój poprzeczny składa się z k warstw idealnie zespolonych, bez możliwości poślizgów, wykonanych z materiałów sprężystych lub lepkosprężystych.



Rys. 1 Schemat analizowanej konstrukcji warstwowej
Fig. 1 The scheme of the analyzed stratified construction

3. Równania problemu

Równania problemu słupa zespolonego wynikają z relacji dotyczących:

- geometrii deformacji pręta warstwowego w warstwie α

$$\varepsilon^\alpha(z^\alpha, t) = \kappa(t) z^\alpha, \quad \varepsilon_0^\alpha(z^\alpha, t) = \kappa_0 z^\alpha, \quad (1)$$

- równań fizycznych warstwy α bazujących na nieinwariantnej teorii dziedziczności

$$\sigma^\alpha(t) = \psi^\alpha(t, \tau) * d\varepsilon^\alpha(t), \quad (2)$$

- sił przekrojowych w zginanym słupie zespolonym

$$N = \sum_\alpha N^\alpha = \sum_\alpha \int_{F^\alpha} z^\alpha dF^\alpha \psi^\alpha * d\kappa = 0, \quad M = \sum_\alpha M^\alpha = \sum_\alpha \int_{F^\alpha} (z^\alpha)^2 dF^\alpha \psi^\alpha * d\kappa. \quad (3)$$

Po uwzględnieniu powyższych równań oraz przyjmując, że działająca na pręt siła jest równa przyrostowi siły ΔP , który jest zawsze większy lub równy zero i niezmienny w określonym przedziale czasowym, otrzymano równanie opisujące przyrost krzywizny

$$\Delta\kappa = \left(\sum_\alpha \psi^\alpha I^\alpha \right)^{-1} \left(-\Delta M - \sum_\alpha K^\alpha(t, \tau) * \Delta M^\alpha \right). \quad (4)$$

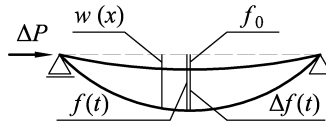
W powyższym wzorze występuje przyrost nieznanego cząstkowego momentu ΔM^α , który obliczyć można wykorzystując warunek zgodności odkształceń, czyli zakładając, że krzywizny poszczególnych warstw jak i całego pręta są takie same, otrzymując

$$\Delta M^\alpha = I^\alpha \psi^\alpha * \left(\sum_\alpha \psi^\alpha I^\alpha \right)^{-1} * \Delta M. \quad (5)$$

Następnie:

- przyjmując przyrost linii ugięcia pręta w postaci

$$\Delta w = \Delta f(t) \sin \frac{\pi x}{l} \quad \text{i} \quad \Delta w = w(x) - w_0(x), \quad (6)$$



Rys. 2 Geometryczna interpretacja równania (6)
Fig. 2 The geometric interpretation of the equation (6)

- uwzględniając, że

$$\Delta M = \Delta P \cdot \Delta w = \Delta P \cdot \Delta f(t) \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (7)$$

- przyjmując wzór na siłę krytyczną dla schematu przedstawionego na rys. 2. w postaci

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \sum \psi^\alpha I^\alpha}{l^2} \quad (8)$$

otrzymano

$$\Delta f(t) \left(\frac{P_{cr}}{\Delta P} - 1 \right) = \int_0^t \Delta f(\tau) \sum_\alpha K^\alpha(t, \tau) * I^\alpha \psi^\alpha * \frac{1}{\sum_\alpha I^\alpha \psi^\alpha} d\tau. \quad (9)$$

Dalej, przyjmując:

- iż warstwy lepkosprężyste opisane zostaną modelem inwariantnej teorii dziedziczności,
- że poszukiwać będziemy rozwiązania w postaci

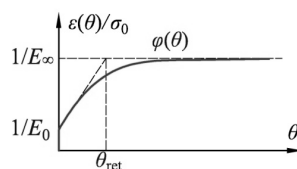
$$\Delta f(t) = f_e e^{\lambda t}, \quad \Delta f(\tau) = f_e e^{\lambda(t-\theta)\tau}, \quad \tau = t - \theta \quad (10)$$

otrzymano równanie

$$\frac{P_{cr}}{\Delta P} - 1 = \int_0^\infty e^{-\lambda\theta} \frac{\sum_\alpha K^\alpha(\theta) I^\alpha E_0^\alpha}{\sum_\alpha I^\alpha E_0^\alpha} d\theta. \quad (11)$$

Dalej przyjmując, że jądro pełzania $K^\alpha(\theta)$ dla materiału inwariantnego dane jest zależnością

$$K^\alpha(\theta) = \left(\frac{E_0^\alpha}{E_\infty^\alpha} - 1 \right) \frac{1}{\theta_{ret}^\alpha} e^{-\frac{\theta}{\theta_{ret}^\alpha}} \quad (12)$$



Rys. 3 Kształt przyjętej funkcji pełzania φ^α ukrytej w równaniu (12)

Fig. 3 The shape of the received function of crawling φ^α hidden in equation (12)

oraz rozwiązując występujące w równaniu całki otrzymano równanie będące podstawą analizy stabilności zespolonego pręta obciążonego osiowo siłą o stałej wartości w postaci

$$\frac{P_{cr}}{\Delta P} - 1 = \frac{\sum_{\alpha} \left(\frac{E_0^{\alpha}}{E_{\infty}^{\alpha}} - 1 \right) \frac{E_0^{\alpha} I_{\alpha}}{\theta_{ret}^{\alpha} \lambda + 1}}{\sum_{\alpha} E_0^{\alpha} I_{\alpha}}. \quad (13)$$

Z powyższego równania dla znanej wartości stosunku $\Delta P/P_{cr}$ można będzie, po określeniu ilości warstw oraz przyjęciu konkretnych wartości materiałowych wyznaczyć wartość parametru λ , a następnie wstawiając do równania (10) otrzymać wykres linii ugięcia analizowanego pręta.

Jednakże w równaniu (10) pozostaje jeszcze niewiadomym parametr opisujący wartość ugięcia natychmiastowego (sprężystego) f_e . Wielkość tego parametru jest ściśle określona i zależy od wielkości imperfekcji f_0 oraz od wielkości siły ściskającej ΔP . Ostatecznie korzystając z całki Mohra można wyznaczyć jej wartość, otrzymując

$$f_e = f_0 \left(\frac{P_{cr}}{\Delta P} - 1 \right)^{-1}. \quad (14)$$

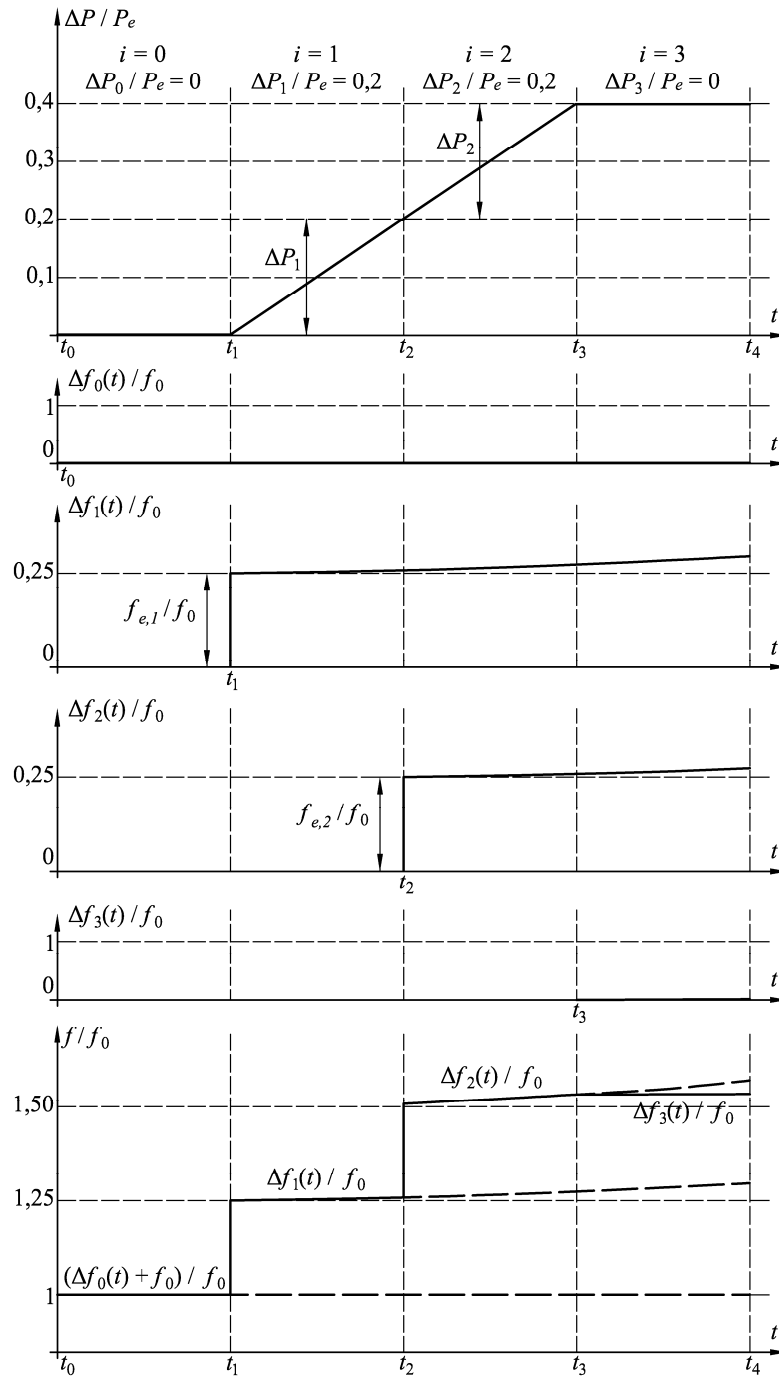
Znając już wszystkie parametry występujące w równaniu (10) możemy określić funkcję przyrostu ugięcia z równania

$$\Delta f(t) = f_0 \left(\frac{P_{cr}}{\Delta P} - 1 \right)^{-1} e^{\lambda t} \quad (15)$$

lub funkcję ugięcia dla dowolnie narastającej siły

$$f(t) = f_0 + \sum_i^n f_{0,i} \left(\frac{P_{cr}}{\Delta P_i} - 1 \right)^{-1} e^{\lambda_i(t-t_i)}. \quad (16)$$

Powyższe równanie zostało otrzymane przy założeniu podziału funkcji obciążenia na n przyrostów obciążenia stałej w danym przedziale czasowym zgodnie z rysunkiem 4.

Rys. 4 Kształt funkcji ugięcia pręta obciążonego dowolną siłą ($n = 4$)Fig. 4 The shape of the function of the deflection of the rod under load any strength ($n = 4$)

Oznaczenia symboli

- E_0, E_∞ – moduł sprężystości początkowej i końcowej materiału, the initial and final elastic modulus, [Pa]
 F – pole przekroju poprzecznego, cross-section area, [m²]
 f_0, f_e, f – strzałka ugięcia wstępnego, natychmiastowego (sprężystego) i końcowego, initial, immediate (elastic) and final deflection arrow, [m]
 I – moment bezwładności, moment of inertia, [m⁴]
 K – jądro pełzania, creep nucleus, [1/sek.]
 l – długość pręta, rod's length, [m]
 P, P_{cr} – siła osiowa, eulerowska siła krytyczna, strength, euler's critical strength, [N]
 t, τ, θ_{ret} – czas (obserwacji), czas (wiek materiału), czas retardacji (opóźnienia), time (observation), time (the age of the material), retardation time, [sek.]
 w, w_0 – ugięcie całkowite i wstępne (początkowe) pręta, final and initial deflection, [m]
 ε – odkształcenia, strain, [-]
 κ, κ_0 – krzywizna całkowita i początkowa pręta, final and initial curvature, [1/m]
 σ – naprężenia, stress, [Pa]
 $\psi(t, \tau)$ – funkcja relaksacji; relaxation function, [Pa];
 przy czym $\psi(t, t) = E_0(t)$
 $*$ – iloczyn splotowy, the convolution product $\left(f * df = \int_0^t f(t-\tau) df(\tau) \right)$

Literatura

- [1] Bodnar A., Chrzanowski M., Latus P.: Reologia konstrukcji prętowych. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków, 2006
 [2] Kubik J.: Mechanika konstrukcji warstwowych. Wydawnictwo TiT, Opole, 1993
 [3] Kubik J.: Wprowadzenie do statyki układów niesprężystych. Wydawnictwo Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu, Opole, 1983
 [4] Misiak J.: Stateczność konstrukcji prętowych. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1990
 [5] Pałkowski Sz.: Podstawy stateczności konstrukcji prętowych. Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej, Koszalin, 1999

THE STABILITY OF COMPOSITE COLUMNS UNDER CHANGING LOADING

Summary

The stability of analysis of viscoelastic composite columns was introduced in the paper. Changing loading was considered. The equation of problem of loss stability of rod with critical force was presented.