

## **SZACOWANIE CZASU PROPAGACJI FAL DŹWIĘKOWYCH W OŚRODKACH MATERIALNYCH ZA POMOCĄ METODY DIJKSTRY**

Zbigniew PERKOWSKI, Karolina GOZARSKA  
Politechnika Opolska, Opole

### **1. Wprowadzenie**

Nieinwazyjne metody diagnostyczne materiałów inżynierskich i elementów konstrukcyjnych, wykorzystujące propagację ultradźwięków, należą do jednych z najbardziej uznanych w tym zakresie. Wykorzystuje się w nich m.in. zjawiska odbicia i dyfrakcji fali na zlokalizowanych uszkodzeniach (pęknięciach, pustkach itp.) i związki pomiędzy prędkością i rozpraszaniem dźwięku, a stanem materiału (np. [2,6,8]). Jednym z ich podstawowych celów jest wyznaczenie prędkości rozchodzenia się określonego typu fali dźwiękowej w ośrodku. Stąd, na podstawie teorii sprężystości [7] (lub bardziej zaawansowanych teorii ciał odkształcalnych, np. modeli lepkosprężystych, sprężysto-kruchych [6]), można wyznaczyć wartości parametrów, określających sztywność materiału i ocenić pośrednio jego stan techniczny. W celu zwiększenia zasobu informacji o sposobie propagacji fali w badanych elementach o złożonym rozkładzie sztywności lub geometrii, sensowne jest również modelować proces równoległe przy pomocy programów komputerowych, np. w ujęciu MES (np. [8]). Wtedy, konfrontując wyniki modelowe z danymi pomiarowymi, można znaleźć znacznie bardziej wiarygodnie rozkład uszkodzeń w rzeczywistym ośrodku materialnym. Należy jednak wspomnieć, że obliczenia przybliżone w tym zakresie w ośrodkach o przestrzennie zmiennym rozkładzie sztywności, tj. bardziej odpowiadających stanom faktycznym (np. w materiałach porowatych z uwagi na ich wielofazowość, nierównomiernie zachodzącą korozję fizyczną lub chemiczną itp.), mogą być czasochłonne z uwagi na cenową dostępność szybkiego sprzętu komputerowego. Stąd w pracy, podano alternatywny sposób szacowania czasu propagacji niektórych typów fal

w ośrodkach o zmiennej sztywności przy wykorzystaniu metody Dijkstry, bazującej na teorii grafów [1,3]. Metoda ta znalazła dotychczas szerokie zastosowanie, m.in. przy wyznaczaniu najkrótszej drogi w nawigacji samochodów i optymalnym trasowaniu przesyłu pakietów danych w sieciach komputerowych.

### **2. Przykład różniczkowego opisu zagadnienia**

W pierwszej kolejności w celach poglądowych przedstawiony zostanie różniczkowy opis zagadnienia na przykładzie izotropowego ośrodka lepkosprężystego Kelvina-Voigta,

podlegającym kruchemu mikrouszkodzeniu opisywanemu wg zasad mechaniki uszkodzeń (np. [9]). Model ten wybrano do pobieżnej analizy, gdyż uwzględniać może zarówno tłumienie, dyspersję fal mechanicznych i nierównomierny rozkład sztywności materiału – tj. efekty występujące, w większym lub mniejszym zakresie, w rzeczywistych materiałach. Należy zaznaczyć, że przedstawione dalej rozważania mają sens, jeśli rozmiary mikrouszkodzeń w stosunku do długości fali mechanicznej będą uzasadniać możliwość przyjęcia założeń mechaniki continuum. W celu uproszczenia zakłada się, że współczynnik Poissona nie podlegać będzie zmianom w wyniku pełzania lub narastania mikrouszkodzeń i nie działają siły masowe. Wówczas, stosując zasadę równoważności odkształceń w ośrodku uszkodzonym i nieuszkodzonym, podstawowy układ równań zagadnienia (w zapisie wskaźnikowym) i warunki początkowo-brzegowe w przypadku ciała, zajmującego obszar  $V \subset R^3$  i ograniczonego powierzchnią  $A$ , będą następujące:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij} = (1-D)(2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\tilde{\mu}\dot{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\lambda}\dot{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij}), \quad (1)$$

$$u_i|_{V,t=0} = u_{0i}, \quad \dot{u}_i|_{V,t=0} = \tilde{v}_{0i}, \quad u_i|_{A_U, t \geq 0} = \hat{u}_i, \quad P_i|_{A_\sigma, t \geq 0} = \sigma_{ij}n_j, \quad A_U \cup A_\sigma = A, \quad A_U \cap A_\sigma = 0, \quad (2)$$

gdzie:  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i, u_{0i}, v_{0i}, \hat{u}_i, P_i$  – składowe tensora naprężeń i odkształceń, wektora przemieszczeń, przemieszczeń i prędkości początkowych oraz przemieszczeń i obciążeń rozłożonych na powierzchni  $A$ ;  $D$  – parametr uszkodzenia;  $\lambda, \mu, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$  – stałe Lamego i parametry opisujące lepkość materiału w stanie nieuszkodzonym;  $t$  – czas,  $\rho$  – gęstość materiału;  $i, j = 1, 2, 3$ . Parametry  $\lambda, \mu, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \rho$  są tu stałe, z kolei  $D$  powinno być wyznaczone z osobnego równania ewolucji i jest w ogólności funkcją czasu i przestrzeni. Zakładając dodatkowo, że w chwili propagacji fali rozkład  $D$  jest ustalony w czasie, równania przemieszczeniowe otrzymane z układu równań (1) będą miały formę:

$$\begin{aligned} & (\mu + \lambda)\psi u_{j,ij} + \mu\psi u_{i,ij} + \mu\psi_{,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda\psi_{,i}u_{j,j} + \\ & + (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})\psi \dot{u}_{j,ij} + \tilde{\mu}\psi \dot{u}_{i,ij} + \tilde{\mu}\psi_{,j}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) + \tilde{\lambda}\psi_{,i}\dot{u}_{j,j} = \rho \ddot{u}_i, \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:  $\psi = 1 - D$ . W przypadku podłużnej fali płaskiej propagującej się wzdłuż osi  $x_1$ , kiedy  $u_1 = u_1(x_1, t), u_2 = u_3 = 0$ , układ równań (3) redukuje się do jednego. M.in. rozwiązanie takiego równania jest łatwe do uzyskania, kiedy ośrodek jest półprzestrzenią  $x_1 \geq 0$ ,  $\psi = \text{const}$ , a w  $x_1 = 0$  działa wymuszenie harmoniczne zadane przemieszczeniem o amplitudzie  $A_0$  i okresie  $\omega$ . Wówczas podstawiając do równania (3) (przy  $i=j=1$ )  $u_1^*$  za  $u_1$  i przyjmując (np. [6]):

$$u_1 = \text{Re}(u_1^*), \quad a \quad u_1^* = A_0 e^{p(kx_1 - \omega t)}, \quad (4)$$

gdzie:  $p$  – liczba zespolona,  $k$  – stała propagacji fali, otrzymuje się po przekształceniach, że:

$$u_1 = A_0 e^{-\frac{\omega q x_1}{v_0}} \cos\left(\frac{\omega r x_1}{v_0} - \omega t\right), \quad r = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + B^2 \omega^2} + 1}{2(1 + B^2 \omega^2)}}, \quad q = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + B^2 \omega^2} - 1}{2(1 + B^2 \omega^2)}}, \quad (5)$$

przy czym:  $B=\eta/E$ ;  $v_0=\sqrt{(2\mu+\lambda)\psi/\rho}$ ;  $E, \eta$  – moduł Younga i lepkość materiału (w jednoosiowym stanie naprężenia);  $v_0$  – prędkość fali podłużnej w materiale przy  $\eta=0$ . Rozwiązanie (5) dostarcza w sposób oczywisty informacji, że fala w analizowanym ośrodku jest tłumiona i ulega dyspersji, a jej prędkość jest proporcjonalna do czynnika  $\psi^{1/2}$ .

Przedstawione zależności, dotyczące falowych aspektów mechaniki w ciele stałym, pozwalają zauważyć, że w stosunku do rzeczywistych ośrodków modelowe, dokładne przewidywanie szybkości fazowej i charakterystyk widmowych dźwięku może być utrudnione, kiedy mamy do czynienia ze zmiennymi i silnie losowymi rozkładami gęstości i sztywności jak np. w materiałach wielofazowych i wieloskładnikowych. Należy w tym momencie wspomnieć, że sprawę w szerszym zakresie komplikować mogą kolejne efekty, wynikające np. z uwzględnienia zjawisk termosprężystych, mikroplastycznych czy działania zewnętrznego pola elektromagnetycznego [6,7]. Wówczas równanie fizyczne w układzie (1) należałoby dalej rozbudowywać, uwzględniając kolejne parametry materiałowe, często trudne do wiarygodnego wyznaczenia eksperymentalnego, co pogłębiłoby w konsekwencji jeszcze bardziej trudności związane z możliwością prowadzenia numerycznych analiz w tym zakresie. Ponadto złożoność modeli od strony geometrycznej, czy fizycznej wiąże się ze wzrostem czasochłonności obliczeń i koniecznością używania bardziej specjalistycznego oprogramowania. Dlatego, jeśli przy prowadzeniu diagnostyki konstrukcji jest celowe ograniczenie się jedynie do analizy szybkości propagacji określonego typu fali mechanicznej, możliwe jest znaczne ułatwienie rozważań przy wykorzystaniu zasady Fermata (np. [5]). Choć sformułowana oryginalnie odnosi się do promieni świetlnych, stosować ją można do opisu propagacji innych fal, tzn., że zaburzenie falowe przebywa z jednego punktu do drugiego drogę, na którą potrzebuje minimum albo maksimum czasu, lub tę samą w porównaniu do innych, sąsiednich dróg.

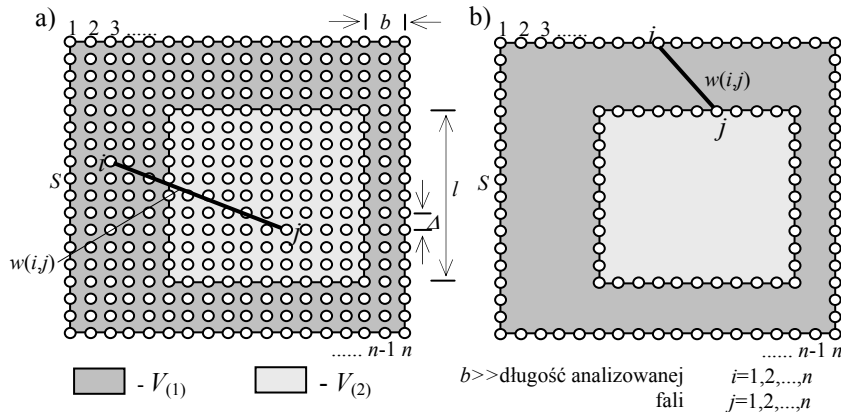
### 3. Propozycja zastosowania metody Dijkstry do przewidywania czasu propagacji fali dźwiękowej w izotropowych, niejednorodnych ciałach stałych

Implementując zasadę Fermata do znajdowania drogi określonego typu fali w ośrodku materialnym można wykorzystać metodę Dijkstry [1,3]. Metoda ta została opracowana w celu znajdowania najkrótszej ścieżki w grafie, odnośnie do wag krawędzi, łączących jego węzły, przy czym wagi muszą być nieujemne. W analizowanym przypadku termin „najkrótsza ścieżka” odnosić się będzie do tej, która będzie się cechować najkrótszym czasem na jej przebycie przez falę dźwiękową. W związku z tym należy zaznaczyć, że jeśli w ośrodku materialnym może rozchodzić się kilka typów fal – np. w ciałach trójwymiarowych lub dwuwymiarowych w płaskim stanie naprężenia lub odkształcenia możliwa jest jednoczesna propagacja fal podłużnych, poprzecznych i Rayleigha [7] – analizie wg tej metody podlegać mogą te fale, które rozchodzą się najszybciej. Metodę można także wykorzystać w przypadku tych fal, których mody mają charakter dominujący, jak np. antysymetryczne fale Lamba w płytach. I tak, formułując bardziej szczegółowo opis postępowania w tym zakresie, założmy, że w punkcie  $S \in V$  zadano impuls, wywołujący propagację fali, interesującego nas typu. Zbudujmy następnie graf z węzłów o numerach  $i$  przypisanych do punktów  $X_{(i)} \in V$  ( $i=1,2,\dots,n$ ).  $S$  jest jednym z punktów  $X_{(i)}$ , a krawędzie grafu  $w(i,j)$  będą zadane tylko między tymi węzłami, w przypadku których jest spełniony warunek  $X_{(i)}X_{(j)} \subset V$  (kiedy  $V$  byłoby wypukłe, będziemy mieli do czynienia z tzw. grafem

pełnym). Wartości wag  $w(i,j)$  stanowiąc będą czasy przejścia dźwięku między punktami, przy założeniu, że poruszałby się on po prostym odcinku  $X_{(i)}X_{(j)}$ . W szczególności, kiedy w ośrodku można byłoby wyróżnić podobszary  $V_{(i)}$  ( $i=1,2,\dots,m$ ;  $V_{(1)}\cup V_{(2)}\cup\dots\cup V_{(m)}=V$  i  $V_{(i)}\cap V_{(j)}=0$  przy  $i\neq j$ ) o stałej prędkości analizowanego typu fal  $v_{(i)}$  (przy założeniu, że charakterystyczne rozmiary  $V_{(i)}$  byłyby takie, by umożliwić ich swobodną propagację [7] (rys. 1a)) obliczenie wagi  $w(i,j)$  sprowadzałoby się do zastosowania wzoru:

$$w(i,j) = \sum_{i=1}^a |A_{(i)}A_{(i+1)}| (v_{(i)})^{-1}, \quad (6)$$

gdzie:  $a$  – liczba odcinków, na które podzielono odcinek  $X_{(i)}X_{(j)}$  ze względu na ich przynależność do różnych podobszarów  $V_{(i)}$  czyli:  $A_{(1)}=X_{(i)}$ ,  $A_{(a+1)}=X_{(j)}$ ,  $A_{(1)}A_{(2)}\cup A_{(2)}A_{(3)}\cup\dots\cup A_{(a)}A_{(a+1)}=X_{(i)}X_{(j)}$  oraz  $A_{(i)}A_{(i+1)}\cap A_{(j)}A_{(j+1)}=0$  przy  $i\neq j$ ,  $A_{(i)}A_{(i+1)}\subset V_{(i)}$  przy  $i=1,2,\dots,a$  oraz  $j=1,2,\dots,m$ . W ogólności można zauważyć, że im większa liczba węzłów równomiernie pokrywających obszar  $V$  (np. zakładając ortogonalną siatkę punktów  $X_{(i)}$ ) obliczenia będą coraz dokładniejsze, przy czym krok siatki musiałby być znacząco mniejszy od najmniejszego charakterystycznego wymiaru podobszarów  $V_{(i)}$  (rys. 1a). W celu przyspieszenia działania metody, kiedy interesują nas tylko czasy propagacji fali z punktu do punktu na brzegu  $A$ , liczbę węzłów można wydatnie zredukować, ograniczając się tylko do tych, które leżą na brzegach podobszarów  $V_{(i)}$  (rys. 1b).



Rys. 1. Sposoby wyboru węzłów grafu: a) ortogonalna siatka równomiernie odległych węzłów, b) obliczenia czasu propagacji dźwięku potrzebne są tylko w przypadku punktów, leżących na brzegu ograniczającym obszar  $V$ .

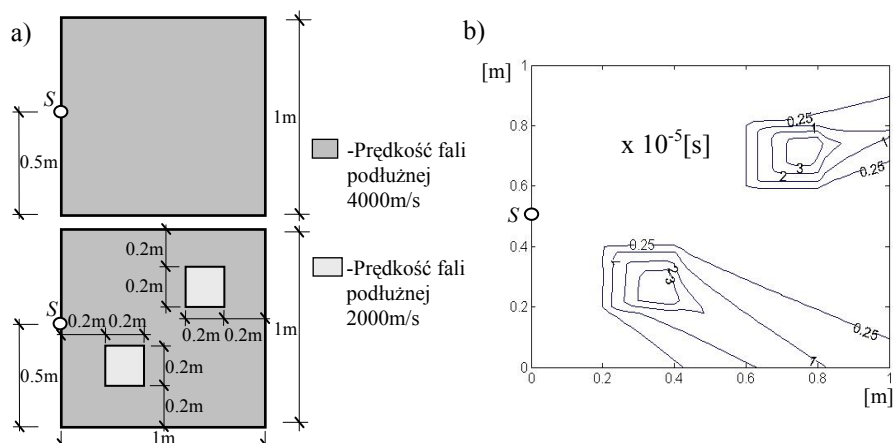
Fig. 1. The ways of selection for graph nodes: a) orthogonal net of uniformly distant nodes, b) calculations of sound propagation time are needed only for the points lying on the boundary restricting area  $V$ .

Mając ułożony graf, można już zastosować w standardowy sposób metodę Dijkstry, tzn:

- 1) Tworzymy zbiór  $Q$  wszystkich węzłów  $i=1,2,\dots,n$  i wektor  $\mathbf{d}$ , w którym zapisujemy czasy potrzebne na przebycie fali z węzła (np. nr 1) odpowiadającemu punktowi  $S$  do innych węzłów. W pierwszej kolejności przyjmuje się, że  $d_1=0$  i  $d_i=\infty$  dla  $i\neq 1$ .
- 2) W zbiorze  $Q$  znajdujemy węzeł (przypiszmy mu nr  $j$ ), w przypadku którego składowa  $\mathbf{d}$  ma wartość minimalną i usuwa się go ze zbioru  $Q$ . Jeśli zbiór  $Q$  jest pusty, kończy się obliczenia.

3) W przypadku pozostałych węzłów  $i \neq j$ , należących do zbioru  $Q$ , sprawdza się nierówność  $d_i > d_j + w(i, j)$ . Jeśli nierówność jest spełniona składowej  $d_i$  przypisuje się wartość  $d_j + w(i, j)$ . Algorytm powraca do punktu 2.

W efekcie końcowym działania algorytmu składowe wektora  $d_i$  równe są czasom, po których od chwili wzbudzenia fali w punkcie  $S$  dotrze ona do punktu  $X_{(i)}$ , przy założeniu, że dźwięk poruszać się może tylko po krawędziach grafu. Poniżej na rys. 2 pokazano przykładowy efekt obliczeń uzyskany dzięki powyższemu algorytmowi w postaci warstwicowego wykresu różnic pomiędzy czasami dotarcia fali podłużnej do poszczególnych punktów w dwóch ośrodkach, znajdujących się w płaskim stanie naprężenia. Mają one identyczne kształty kwadratów  $1\text{m} \times 1\text{m}$ , gdzie jeden z nich jest jednorodny i prędkość fali podłużnej wynosi w nim przykładowo  $4000\text{m/s}$  (odpowiada przeciętnie betonom), a w drugim znajdują się jeszcze dwa podobne kwadraty, symulujące strefy uszkodzone o bokach  $0.2\text{m} \times 0.2\text{m}$ , w których prędkość fali jest dwa razy mniejsza. Założono, że źródło fali  $S$  o częstotliwości  $200\text{kHz}$  znajduje się w środku lewych boków kwadratów. Obliczenia wykonano własnym programem w środowisku Matlab. Zastosowano graf, którego węzły odpowiadają siatce ortogonalnej punktów o kroku  $2\text{cm}$ . Czas potrzebny użytkownikowi (jeden procesor  $1.6\text{GHz}$  i  $448\text{MB}$  RAM) na wykonanie obliczeń wyniósł ok.  $3\text{min.}$  na jedno zadanie.



Rys. 2. Różnice czasowe propagacji fali podłużnej w dwóch przykładowych izotropowych ośrodkach o identycznych wymiarach zewnętrznych, z których jeden jest jednorodny, a drugi niejednorodny: a) schemat geometryczny, b) wykres warstwicowy.

Fig. 2. The time-differences in the propagation of longitudinal wave in two exemplary isotropic media of the same external dimensions from which one is homogeneous and the second one is heterogeneous: a) geometrical scheme, b) contour line diagram.

#### 4. Podsumowanie

Przedstawiony sposób obliczania czasu propagacji fali mechanicznej jest łatwy do samodzielnej implementacji w programie komputerowym o relatywnie krótkim czasie działania z możliwością analizy zagadnienia w ośrodkach niejednorodnych. Cecha ta może czynić go przydatnym przy zastosowaniu szeregu metod optymalizacyjnych w rekonstruowaniu uszkodzeń konstrukcji (w szczególności konstrukcji masywnych lub o względnie dużych rozmiarach np. w przypadku stropów), gdzie w uzależnieniu od ich

rozmieszczenia poszukiwać można minimum funkcji błędu bezwzględnego pomiędzy obliczonymi modelowo i pomierzonymi czasami przelotu fal ultradźwiękowych między wybranymi punktami tej konstrukcji. Ograniczeniem zaprezentowanego podejścia jest niewątpliwie to, iż nie można na jego podstawie dokonać analizy szybkości propagacji fal po ich odbiciu od brzegu ośrodka.

### Oznaczenia symboli

- $u_i$  - składowa wektora przemieszczeń, displacement vector component, [m],  
 $v$  - prędkość fali, wave velocity, [m/s],  
 $A$  - powierzchnia ograniczająca  $V$ , surface restricting  $V$ , [m<sup>2</sup>],  
 $D$  - parametr uszkodzenia, damage parameter, [-],  
 $V$  - obszar zajmowany przez ciało, area occupied by body, [m<sup>3</sup>],  
 $\varepsilon_{ij}$  - składowa tensora odkształceń, strain tensor component, [-],  
 $\sigma_{ij}$  - składowa tensora naprężeń, stress tensor component, [Pa],  
 $\lambda, \mu$  - stałe Lamego, Lamé constants, [Pa],  
 $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$  - stałe opisujące lepkość, constants describing viscosity, [Pa·s],  
 $\rho$  - gęstość masy, mass density, [kg/m<sup>3</sup>],

### Literatura

- [1] Dijkstra E.W., A note on two problems in connexion with graphs, *Numerische Mathematik*, 1, 1959, 269-271  
 [2] Drobiec Ł., Jasiński R., Piekarczyk A., Metody lokalizacji wad konstrukcji betonowych – metoda ultradźwiękowa (cz. I), *Przegląd budowlany*, 9, 2007, 29-36  
 [3] Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C., Wprowadzenie do algorytmów, WNT, Warszawa, 2007  
 [5] Holiday D., Resnick R., Fizyka, T.2, PWN, Warszawa, 1994  
 [6] Jakowluk A., Procesy pełzania i zmęczenia w materiałach, WNT, Warszawa, 1993  
 [7] Nowacki W., Teoria sprężystości, PWN, Warszawa, 1970  
 [8] Rucka M., Witkowski W., Chróścielewski J., Wilde K., Damage detection of a T-shaped panel by wave propagation analysis in the plane stress, *Archives of Civil Engineering*, LVIII, 1, 2012, 3-24  
 [9] Litewka A., Uszkodzenie i pękanie metali w warunkach pełzania, Wyd. Pol. Poznańskiej, Rozprawy, 250, Poznań, 1991

## ABOUT A POSSIBILITY OF ESTIMATION OF SONIC WAVE PROPAGATION TIME IN MATERIAL MEDIA BY MEANS OF DIJKSTRA'S ALGORITHM

### Summary

A proposition of method enabling an estimation of wave propagation time from point to point (but without refraction) in material media is presented in the work. The calculating procedure is based on Fermat's principle and Dijkstra's algorithm and it is relatively quick and easy for its implementation by means of individual computer code. It can be used effectively in optimization methods oriented on reconstruction of damage state in engineering structures basing on time-of-flight measurements for mechanical waves.