

## SZACOWANIE FUNKCJI RELAKSACJI WARSTW DREWNA – ANALIZA WRAŻLIWOŚCI MODELU

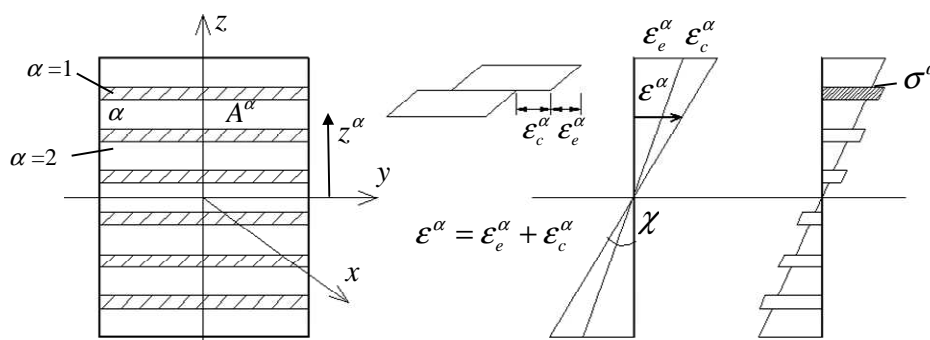
Kamil PAWLIK  
Politechnika Opolska, Opole, Polska

### 1. Wstęp

Drewno z uwagi na swoją słojuową budowę i materiały drewnopochodne takie jak sklejka są materiałami warstwowymi. Właściwości mechaniczne takich materiałów są wypadkową właściwości ich poszczególnych warstw. Stąd celem niniejszej pracy jest przedstawienie praktycznie użytecznego modelu matematycznego, który umożliwia szacowanie właściwości poszczególnych warstw elementów drewnianych na podstawie wyników ich badań jako całości, ze szczególnym zwróceniem uwagi na stabilność prowadzonych obliczeń. Model taki został przedstawiony w pracach Pawlika i Kubika [1, 2]. Nie została jednak przeprowadzona analiza wrażliwości oraz przydatności podanego modelu.

### 2. Model lepkosprężystego pręta warstwowego

W pracy analizowany jest zginany lepkosprężysty pręt warstwowy. Jego model przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Model zginanego pręta warstwowego  
Fig. 1. The model of bending layered bar

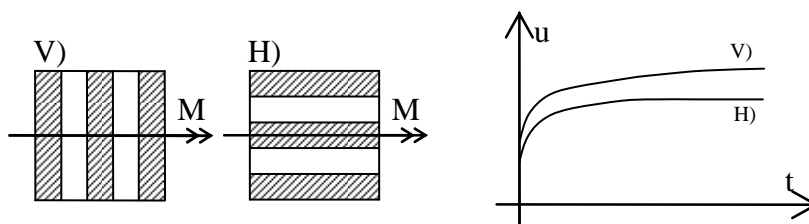
Przedstawiony w pracach [1, 2] model opisuje układ równań splutowych

$$\begin{cases} (J_1^V E_1(t) + J_2^V E_2(t)) * du_V(t) = \int_s \hat{M} \cdot M_1 ds \\ (J_1^H E_1(t) + J_2^H E_2(t)) * du_H(t) = \int_s \hat{M} \cdot M_1 ds \end{cases} \quad (1)$$

który przy wykorzystaniu transformacji Laplace'a można sprowadzić do zwykłego układu równań algebraicznych

$$\begin{cases} (J_1^V \bar{E}_1(s) + J_2^V \bar{E}_2(s)) \cdot \bar{u}_V(s) = \frac{1}{s^2} \int_s \hat{M} \cdot M_1 ds \\ (J_1^H \bar{E}_1(s) + J_2^H \bar{E}_2(s)) \cdot \bar{u}_H(s) = \frac{1}{s^2} \int_s \hat{M} \cdot M_1 ds \end{cases} \quad (2)$$

By rozwiązać układ równań (2) należy w trakcie eksperymentu wyznaczyć krzywe pełzania w różnych układach warstw, tzn. by ich momenty bezwładności różniły się. Można to uzyskać np. przez obrócenie pręta o  $90^\circ$ . Przedstawione jest to na rysunku 2.



Rys. 2. Układ warstw w przekroju pręta.  
Fig. 2. The layer system in the cross-section of the bar.

To właśnie stosunki momentów bezwładności w różnych układach warstw mogą być przyczyną niestabilności układu. Tym właśnie zagadnieniem zajęto się w dalszej części pracy.

### 3. Analiza wrażliwości modelu

Przeanalizujemy wpływ wartości momentów bezwładności warstw na stabilność układu równań (2). Przy założeniu, że przekrój pręta jest kwadratowy, wartości poszczególnych charakterystyk mogą przyjąć następujące wartości:

$$\begin{aligned} J_1^V &= J, & J_2^V &= a \cdot J, \\ J_1^H &= b \cdot J, & J_2^H &= (1 + a - b) \cdot J, \end{aligned} \quad (3)$$

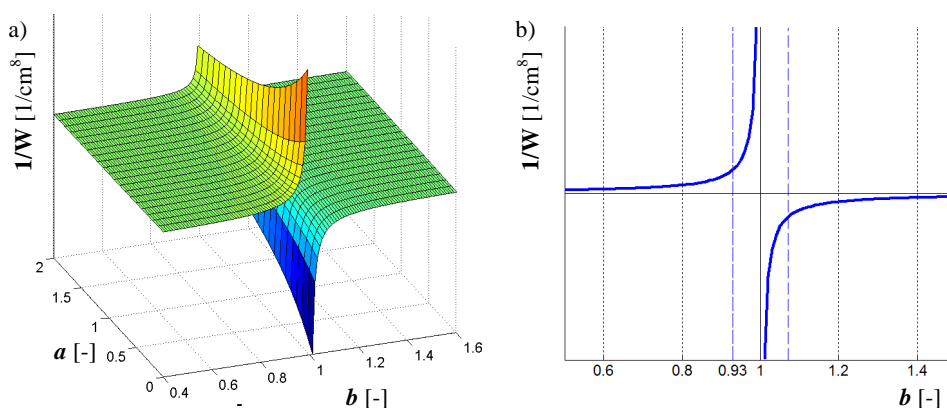
gdzie  $a = J_2^V / J_1^V$  i  $b = J_1^H / J_1^V$  to stosunki momentów bezwładności kolejno obu warstw w tym samym układzie i tej samej warstwy w różnych układach warstw.

W układzie Kramera, przy obliczaniu niewiadomych, wyznacznik główny znajduje się w mianowniku. Układ równań (2) będzie stawał się więc niestabilny, gdy jego wyznacznik główny będzie dążył do zera, gdyż

$$\frac{1}{W} \rightarrow \infty, \text{ kiedy } W \rightarrow 0. \quad (4)$$

W naszym przypadku wyznacznik, będzie dany relacją

$$W = J^2(1+a)(1-b). \quad (5)$$



Rys. 3. Wykresy odwrotności wyznacznika głównego układu równań  
Fig. 3. The graphs of invers of a main determinant of the system of equations

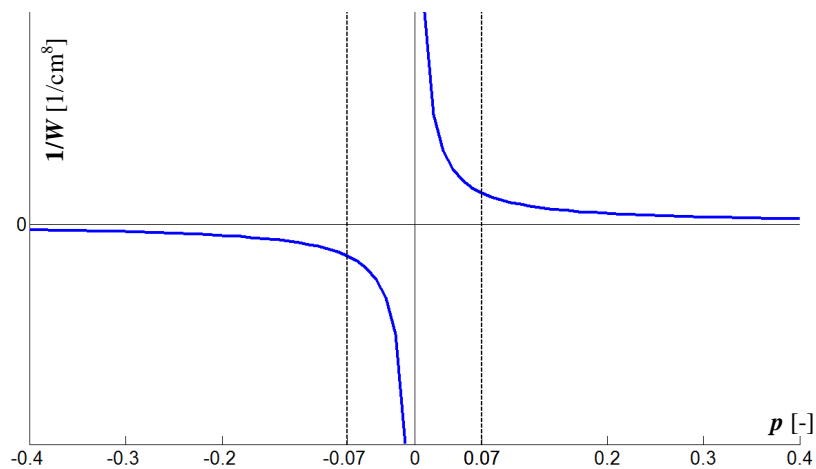
Na rysunku 3a wykreślony został wykres wyrażenia  $1/W$ . Można zauważyć, że stabilność układu prawie nie zależy od wartości parametru  $a$ , jest jednak silnie zależna od parametru  $b$ . Rysunek 3b przedstawia wykres funkcji  $1/W$  dla wartości parametru  $a=1$ . Można tu zauważyć, że gdy różnica pomiędzy momentami bezwładności poszczególnych warstw w kolejnych ich układach jest mniejsza niż 7% to model staje się niestabilny.

Przeanalizujmy teraz ogólniejszy przypadek pręta o przekroju prostokątnym, gdzie wartości momentów bezwładności przyjmują wartości

$$\begin{aligned} J_1^V &= A, & J_2^V &= c \cdot A, \\ J_1^H &= B, & J_2^H &= d \cdot B, \end{aligned} \quad (6)$$

Parametry  $c$  i  $d$  w tym przypadku są stosunkami momentów bezwładności dwóch warstw w każdym z układów. Wyznacznik główny układu równań (2) dany będzie teraz wyrażeniem

$$W = A \cdot B \cdot p, \text{ gdzie } p = d - c. \quad (7)$$

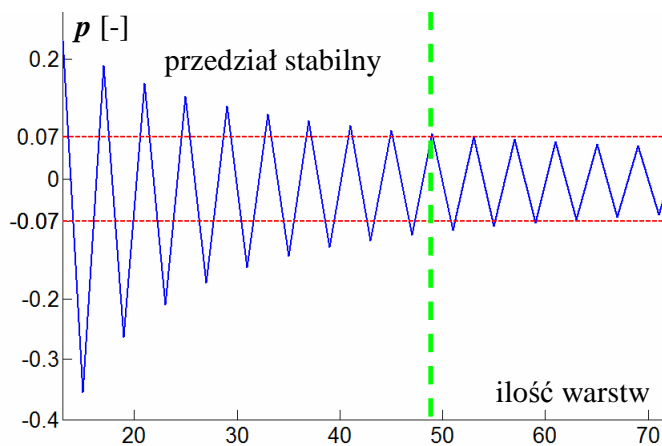


Rys. 4. Wykres odwrotności wyznacznika głównego układu równań.  
 Fig. 4. The graph of invers of a main determinant of the system of equations.

Z wykresu wartości wyrażenia  $1/W$  w funkcji parametru  $p$  umieszczonego na rysunku 4 wynika, że, gdy różnica pomiędzy stosunkami momentów bezwładności warstw w dwóch układach jest mniejsza niż 0.07, model staje się niestabilny.

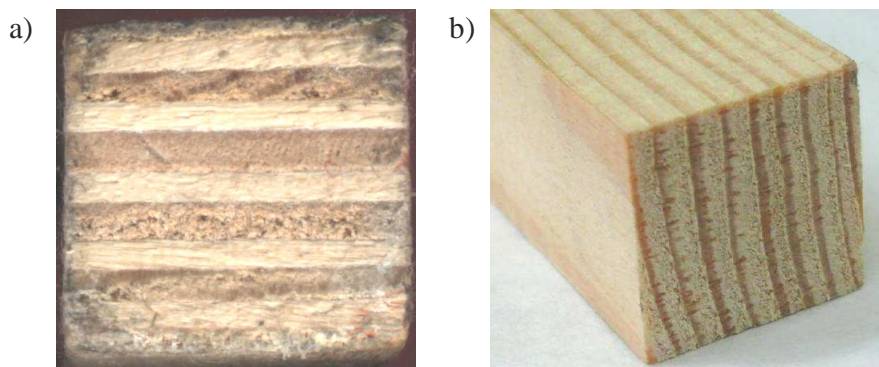
#### 4. Analiza przydatności modelu

Analiza wrażliwości omawianego modelu pozwoliła na ocenę jego przydatności do różnego typu materiałów. Zakładając, że przekrój pręta składa się z dwóch rodzajów warstw o tej samej grubości, ułożonych na przemian i równoległych do siebie, przeprowadzono obliczenia wartości parametru  $p$  w zależności od ilości warstw. Przedstawione są one w formie wykresu na rysunku 5.



Rys. 5. Wykres zależności parametru  $p$  od liczby warstw.  
 Fig. 5. The graph of the dependence of the  $p$  parameter on the number of layers.

Można tu zauważyć, że przy większej ilości warstw niż 49 model staje się niestabilny. Przydatność modelu determinowana jest więc przez ilość warstw, a to daje ograniczenia na rozmiary badanych próbek.



Rys. 6 Przekroje próbek: a) sklejka, b) drewno lite  
Fig. 6 Cross-section of samples: a) plywood, b) solid wood

Rysunek 6 przedstawia zdjęcia przekrojów belek wykonanych ze sklejki i drewna litego. W typowej sklejce o grubości 16mm występuje 11 warstw, więc w przypadku większości sklejek model będzie przydatny. W przypadku drewna litego, przekrój o wymiarach 20mmx20mm posiada około 17 warstw, co powoduje, że badane próbki nie powinny być większe od 5cm. Jednakże, by zminimalizować wpływ błędów pomiarowych na wyniki obliczeń, przy obliczaniu momentów bezwładności warstw o tak rozmytych granicach (jak to widać na rysunku 6b), wymiary próbek nie powinny przekraczać 3cm.

## 5. Podsumowanie

Podsumowując, można stwierdzić, że analizowany model jest przydatny w przypadku materiałów drewnopochodnych. Stosowność tego modelu jest jednak ograniczona rozmiarami próbek. Ich wymiary poprzeczne nie powinny przekraczać kilku centymetrów.

W przypadku innych materiałów warstwowych, w których warstwy mają większe grubości, model będzie przydatny także dla większych próbek.

## Oznaczenia symboli

- $u_i$  – ugięcie pręta, deflection of the rod, [m],
- $M$  – moment zginający, bending moment, [Nm],
- $E^\alpha$  – funkcje relaksacji warstwy  $\alpha$ , relaxation function of the layer  $\alpha$ , [Pa]
- $J^\alpha$  – moment bezwładności warstwy  $\alpha$ , moment of inertia of the layer  $\alpha$ , [m<sup>4</sup>]
- $\bar{y}(s)$  – transformacja Laplace'a funkcji  $y(t)$ , Laplace transformation of the function  $y(t)$ ,
- $s$  – parametr transformacji, parameter of transformation,
- $a, b, c, d, p$  – relacje momentów bezwładności warstw pręta, relations of moments of inertia of bars layers, [-];

### **Literatura**

- [1] Kubik J., Pawlik K.: Szacowanie właściwości reologicznych składników drewna, Matbud'2011, IV Konferencja Naukowo-Techniczna, Kraków, 2011.
- [2] Pawlik K.: Szacowanie funkcji relaksacji drewna wzdłuż i w poprzek włókien, Roczniki Inżynierii Budowlanej PAN o/Katowice, z. 12, Opole, 2012.

### **ESTIMATION OF THE RELAXATION FUNCTIONS OF LAYERS OF WOOD – SENSITIVITY ANALYSIS OF MODEL**

#### **Summary**

In the paper a analysis enabling the evaluation the stability and the usefulness of the model described in [1] was presented. The analysis was carried out for plywood and solid wood.