

## NARASTANIE USZKODZEŃ W MATERIALE SPRĘŻYSTO-KRUCHYM W UJĘCIU PROBABILISTYCZNYM\*

Zbigniew PERKOWSKI  
Politechnika Opolska, Opole

### 1. Wprowadzenie

W pracy przedstawiono przykładowe sformułowania problemów mechaniki uszkodzenia przy jednoosiowym stanie naprężenia, w których przyjęto, że część z wielkości niezbędnych do zdefiniowania procesu jest zmiennymi lub procesami losowymi. Do modelowania ewolucji opisu uszkodzeń przyjęto najbardziej prosty opis skalarny. Dla znacznego uproszczenia rozważań zaproponowano dwa ujęcia zagadnienia. W pierwszym przyjęto, iż wielkości charakteryzujące właściwości materiału są zmiennymi losowymi, natomiast reszta wielkości opisujących proces jest deterministyczna. Z kolei w drugim ujęciu założono, że obciążenie zewnętrzne jest procesem losowym, a pozostałe parametry są deterministyczne. Należy zaznaczyć, że taki opis problemu zawęży stosowalność modelu do ściśle określonych przypadków praktycznych. Pierwsze zagadnienie może być przydatne wtedy, kiedy znany jest dokładnie charakter oddziaływań zewnętrznych na układ, natomiast niemożliwe jest dokładne oszacowanie właściwości materiału, z którego ten układ wykonano – np. przez niemożność narzucenia ścisłych reżimów na produkcję tego materiału z uwagi na przyjętą technologię. Drugi przypadek, odwrotnie, odnosi się do sytuacji, w której jakość materiału jest wysoka i można z dużą pewnością określić jego właściwości, natomiast oddziaływanie otoczenia na układ wykonany z tego tworzywa jest zmienne w czasie w sposób przypadkowy. Niezależnie od rozważanego przypadku przyjęto, że geometria układu jest określona deterministycznie.

### 2. Jednoosiowe rozciąganie pręta sprężysto-kruchego z parametrami materiałowymi jako zmiennymi losowymi

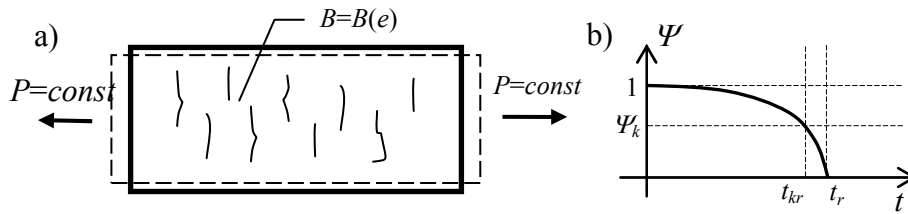
Rozważmy pręt o stałym polu przekroju  $F$ , rozciągany stałym obciążeniem  $P$ , jak na rys. 1a. Niech uszkodzenia w pręcie podlegają ewolucji zgodnie z prawem sformułowanym przez Kačanova, gdzie prędkość narastania uszkodzeń uzależniona jest od naprężeń efektywnych wg relacji [3,4]

$$\dot{\psi} = -B \left( \frac{\sigma}{\psi} \right)^w, \quad B > 0, \quad \text{dla } \sigma > 0 \quad (1)$$

$$\psi(t = 0^+) = 1, \quad \psi(t \rightarrow t_r) \rightarrow 0. \quad (2)$$

---

\* Praca powstała w ramach seminarium Katedry Fizyki Materiałów WB PO z termomechaniki



Rys. 1. a) Schemat pręta rozciąganego z uszkodzeniami. b) Zmiany parametru ciągłości uszkodzenia w czasie.  
 Fig. 1 a) Scheme of damaged bar during tension. b) Time-change of the damage continuity parametr.

Po przyjęciu, że  $\sigma=P/F \approx const$  otrzymamy następujące rozwiązanie równania (1)

$$\psi(t) = \left(1 - B \sigma^w (w+1)t\right)^{\frac{1}{w+1}} \quad (3)$$

Założmy, że interesuje nas czas krytyczny  $t_{kr}$  potrzebny do osiągnięcia w materiale dopuszczalnego poziomu uszkodzenia opisanego przez wartość parametru ciągłości uszkodzenia  $\psi_{kr}$  (rys. 1b), który może być wybrany arbitralnie, w zależności od rozpatrywanego przypadku

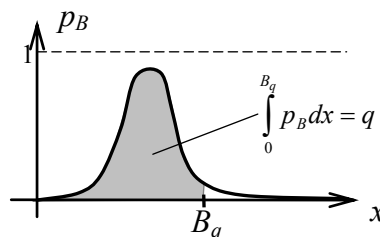
$$\psi(t_{kr}) = \psi_{kr}, \quad \text{np. } \psi_{kr} = 0,3 \quad (4)$$

Wówczas na podstawie rozwiązania (3) można określić czas krytyczny dla rozpatrywanego pręta wg relacji

$$t_{kr} = \frac{1 - \psi_{kr}^{w+1}}{B \sigma^w (w+1)} \quad (5)$$

Jeśli teraz przyjmiemy, że parametr  $B$  jest zmienna losową o rozkładzie prawdopodobieństwa  $p_B$ , jak na rys. 2, to możemy obliczyć jego  $q$ -kwantyl  $B_q$ . Podstawiając  $B_q$  do wzoru (5) za  $B$  otrzymamy wyrażenie na czas  $t_{kr,q}$  potrzebny do osiągnięcia przez pręt dopuszczalnego poziomu uszkodzenia przez nie więcej, niż  $(1-q) \cdot 100\%$  próbek, tzn.

$$t_{kr,q} = \frac{1 - \psi_{kr}^{w+1}}{B_q \sigma^w (w+1)}, \quad \text{gdzie } q = \int_0^{B_q} p_B dx \quad (6)$$

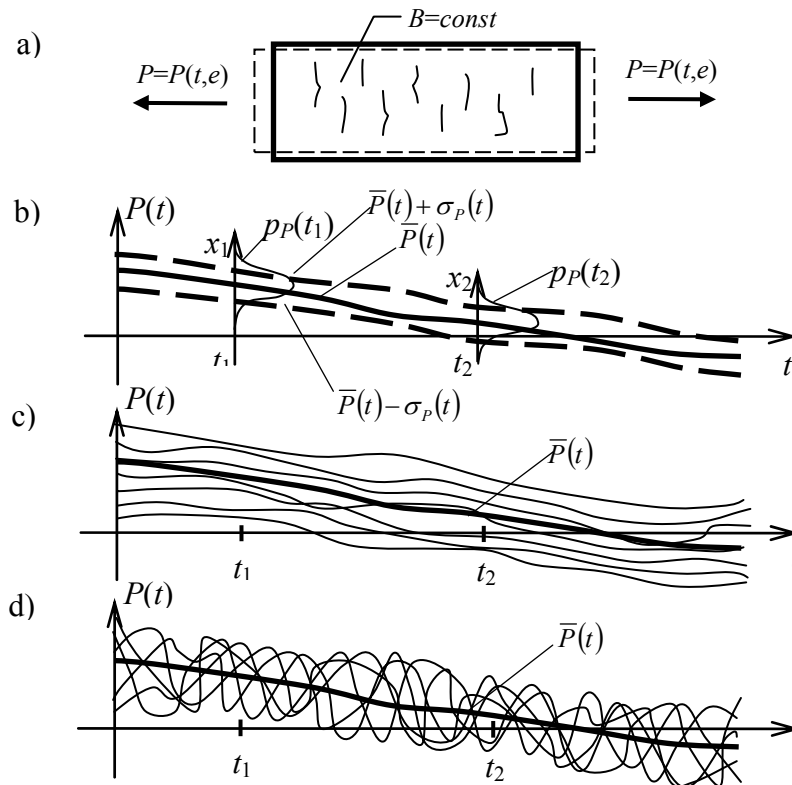


Rys. 2. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa parametru  $B$  i interpretacja geometryczna jego  $q$ -kwantylu  $B_q$   
 Fig. 2 Probability density distribution of the parameter  $B$  and a geometrical interpretation of its  $q$ -quantile  $B_q$

### 3. Jednoosiowe rozciąganie/ściskanie pręta sprężysto-kruchego z obciążeniem jako procesem losowym

Rozważmy identyczny pręt, jak w punkcie 2, z tym, że jego obciążenie  $P$  jest procesem stochastycznym, a właściwości materiału są deterministyczne (rys. 3a, 3b). Pręt wobec tego może być zarówno ściskany, jak i rozciągany – zależnie od realizacji procesu obciążenia. Wobec tego równanie ewolucji uszkodzenia (1) należy uzupełnić o dodatkowy warunek w przypadku ściskania, gdzie zgodnie z teorią uszkodzeń materiałów kruchych w trakcie ściskania mikropęknięcia materiału rozwijają się w nikłym zakresie (np. w [5,6,7]), tak, że można pominąć ich wpływ na przebieg procesu, tzn.

$$\dot{\psi} = -B \left( \frac{\sigma}{\psi} \right)^w, \text{ dla } \sigma > 0 \text{ oraz } \dot{\psi} = 0 \text{ dla } \sigma \leq 0. \quad (7)$$



Rys. 3. a) Schemat pręta rozciąganego z uszkodzeniami. b) Przykładowy przebieg wartości średniej obciążenia  $P$  z zaznaczeniem jego odchyłeń standardowych oraz rozkładów prawdopodobieństwa w wybranych chwilach  $t_1$  i  $t_2$ . c) Przykłady realizacji wolnozmiennego obciążenia. d) Przykłady realizacji szybkozmiennego obciążenia.

Fig. 3 a) Scheme of the damaged bar during tension. b) An example of change of mean load  $P$  with its standard deviation and probability density at moments  $t_1$  and  $t_2$ . c) Examples of realisation of slow-changeable load. d). Examples of realisation of quick-changeable load.

Założmy, że znamy podstawowe charakterystyki probabilistyczne procesu obciążenia: gęstość prawdopodobieństwa  $p_P$ , wartość oczekiwaną  $\bar{P}$ , wariancję  $D_P$ , odchylenie standardowe  $\sigma_P$  dla każdej chwili procesu (rys. 4b) oraz funkcje kowariancji procesu  $cov_P$  i unormowaną funkcję kowariancji  $\rho(t_1, t_2)$  dla każdych dwóch wybranych chwil procesu. Są one dane zależnościami:

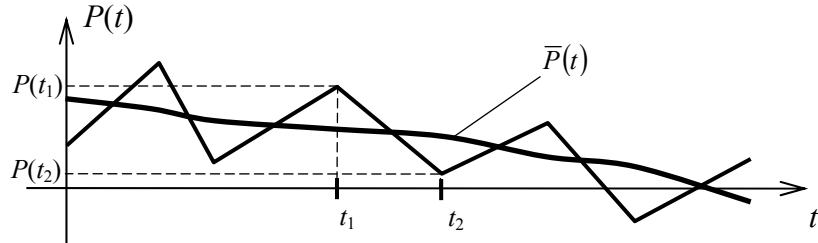
$$\bar{P}(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_P(t_1) dx_1, \quad D_P(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{P}(t_1))^2 p_P(t_1) dx_1, \quad \sigma_P(t_1) = \sqrt{D_P(t_1)},$$

$$cov_P(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{P}(t_1))(x_2 - \bar{P}(t_2)) p_P(t_1, t_2, x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad \rho(t_1, t_2) = \frac{cov(t_1, t_2)}{\sigma_P(t_1) \sigma_P(t_2)}. \quad (8)$$

Znajomość ostatniej z wymienionych charakterystyk procesu jest szczególnie ważna, gdyż informuje ona czy proces obciążenia jest wolnozmienny (rys. 3c), czy szybkozmienny (rys. 3d) [2]. Ten ostatni, z uwagi na przyjęty model narastania uszkodzeń materiału i pominięcie sił bezwładności nie może być opisywany przez prezentowane równania (1) i (7). Oznacza to, że w analizowanym zagadnieniu  $\rho$  dla dwóch nieodległych chwil  $t_1$  i  $t_2$  musi mieć wartości bliskie jedności.

Przeanalizujmy teraz szczególny przypadek losowego przebiegu obciążenia wolnozmiennego, gdzie w trakcie równych interwałów czasowych zmienia się ono liniowo, przy czym wartości na początku i na końcu interwału są zmiennymi losowymi. Przykład pojedynczej realizacji takiego procesu pokazano na rys. 4. Wówczas dla dowolnej pary chwil  $t_1$  i  $t_2$  wyznaczających początek i koniec interwału czasowego, na którym zlinearyzowano przebieg obciążenia, będą zachodziły relacje

$$\sigma_1 = \frac{P(t_1)}{F}, \quad \sigma_2 = \frac{P(t_2)}{F}, \quad \dot{\sigma} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{t_2 - t_1}. \quad (9)$$



Rys. 4. Przykład realizacji losowego procesu obciążenia zlinearyzowanego w poszczególnych przedziałach czasowych

Fig. 4 An example of realization of random load process after linearization in particular time intervals

Wtedy, w zależności od znaku naprężenia na początku i końcu interwału można otrzymać opejonalnie następujące rozwiązania równań (7):

$$1) \psi(t_2) = \left( (\psi(t_1))^{w+1} - B(1+w) \int_{t_1}^{t_2} (\sigma_1 + \dot{\sigma}(t-t_1))^w dt \right)^{\frac{1}{1+w}}, \quad \text{jeśli } \sigma_1 > 0 \text{ i } \sigma_2 > 0, \quad (10)$$

$$2) \psi(t_2) = \left( (\psi(t_1))^{w+1} - B(1+w) \int_{t^*}^{t_2} (\sigma_1 + \dot{\sigma}(t-t_1))^w dt \right)^{\frac{1}{1+w}}, \quad t^* = t_2 - \sigma_2 \frac{t_2 - t_1}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

jeśli  $\sigma_1 < 0$  i  $\sigma_2 > 0$ ,

(11)

$$3) \psi(t_2) = \left( (\psi(t_1))^{w+1} - B(1+w) \int_{t_1}^{t^*} (\sigma_1 + \dot{\sigma}(t-t_1))^w dt \right)^{\frac{1}{1+w}}, \quad t^* = t_1 + \sigma_1 \frac{t_2 - t_1}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

jeśli  $\sigma_1 > 0$  i  $\sigma_2 < 0$ ,

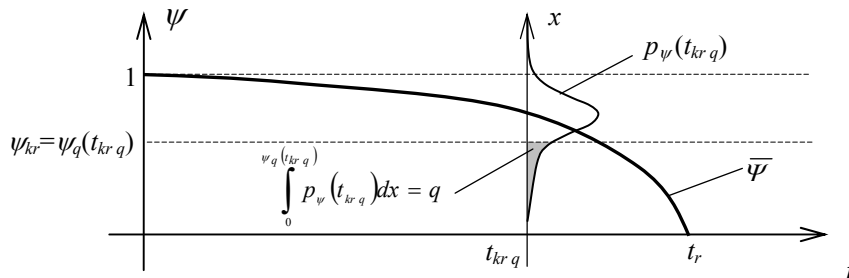
(12)

$$4) \psi(t_2) = \psi(t_1), \text{ jeśli } \sigma_1 < 0 \text{ i } \sigma_2 < 0. \quad (13)$$

Ponieważ wartości parametru ciągłości uszkodzenia  $\Psi$  dla dowolnej chwili procesu otrzymane na podstawie zestawu równań (10)-(13) zależą ściśle od wylosowanej realizacji obciążenia, to funkcje aproksymujące gęstości prawdopodobieństwa tego parametru dla poszczególnych chwil procesu można otrzymać tylko na drodze symulacji komputerowych (np. metodą Monte Carlo [1]). Wówczas dla ustalonego dopuszczalnego poziomu uszkodzenia wyrażonego wartością  $\Psi_{kr}$  można ustalić czas krytyczny  $t_{krq}$ , poniżej którego tylko  $q$ \*100% próbek ulegnie zniszczeniu. Można tego dokonać na podstawie warunku

$$\psi_q(t_{krq}) = \Psi_{kr}, \text{ gdzie } \int_0^{\psi_q(t_{krq})} p_\psi(t_{krq}) dx = q \quad (14)$$

Interpretację geometryczną powyższego warunku przedstawiono na rys. 5, gdzie symbolem  $\bar{\psi}$  oznaczono wartość oczekiwaną parametru ciągłości uszkodzenia.



Rys. 5. Interpretacja geometryczna warunku (14) na określenie czasu krytycznego dla pręta w zależności od przyjęcia dopuszczalnej wartości parametru ciągłości uszkodzenia  $\psi_{kr}$ .  
 Fig. 5 A geometrical interpretation of the requirement (14) for a determination of critical time for the bar in dependence on admissible value of damage continuity parameter  $\psi_{kr}$ .

#### 4. Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonych rozważań można stwierdzić, że metody i założenia kontynuacyjnej mechaniki uszkodzenia dają podstawy do dokładnego szacowania czasu krytycznego bezpiecznej eksploatacji konstrukcji i jej elementów poddanych wolnozmiennym procesom obciążenia – o ile znane są charakterystyki losowe parametrów opisujących rozważany proces.

## Oznaczenia symboli

- $cov_y$  - kowariancja zmiennej losowej  $y$ , covariance of random variable  $y$ ,  
 $p_y$  - rozkład gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $y$ , probability density distribution of random variable  $y$ ,  
 $t$  - czas, time, [s],  
 $t_r$  - czas zniszczenia pręta, failure time for bar, [s],  
 $\bar{y}$  - wartość średnia zmiennej  $y$ , mean value of random variable  $y$ ,  
 $y_q$  -  $q$ -kwantyl zmiennej losowej  $y$ ,  $q$ -quantile of random variable  $y$ ,  
 $B$  - parametr materiałowy, material parameter, [ $1/(s \cdot Pa^w)$ ],  
 $D_y$  - wariancja zmiennej losowej  $y$ , variation of random variable  $y$ ,  
 $F$  - pole przekroju pręta, area of bar cross-section, [ $m^2$ ],  
 $P$  - obciążenie, load, [N],  
 $\sigma$  - naprężenie, stress, [Pa],  
 $\Psi$  - parametr ciągłości uszkodzenia, damage continuity parameter, [-],  
 $\Psi_{kr}$  - krytyczna wartość parametru ciągłości uszkodzenia, critical value of damage continuity parameter, [-].

## Literatura

- [1] Brandt S., Analiza danych, WN PWN, Warszawa, 1998  
[2] Chmielewski T., Metody probabilistyczne w dynamice konstrukcji, WSI w Opolu, Studia i Monografie, 1, Opole, 1982  
[3] Jakowluk A., Procesy pełzania i zmęczenia w materiałach, WNT, Warszawa, 1993  
[4] Kačanov L.M., O vremeni razrušenija v uslovijach polzučesti. Izv. AN SSSR OTN, 8, 26-31, 1958  
[5] Kubik J., Perkowski Z., Narastanie uszkodzeń w materiałach porowatych, OW Politechniki Opolskiej, Studia i Monografie, 178, Opole 2005  
[6] Litewka A., Uszkodzenie i pękanie metali w warunkach pełzania, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Rozprawy, 250, Poznań, 1991  
[7] Murakami S., Kamiya K., Constitutive and damage evolution equations of elastic brittle materials based in irreversible thermodynamics, Int. J. Solids Structures, 39, 437-486, 1997

## PROBABILISTIC DESCRIPTION OF DAMAGE EVOLUTION IN ELASTIC-BRITTLE MATERIAL

### Summary

A general stochastic formulation of continuum damage mechanics problems for uniaxial state of stress was presented in the work. To simplify the problem one assumed that damage was described by the scalar parameter. Especially one considered two cases – only material parameters were random variables in the first case and only a load applied to the bar had a random character in the second case.