

WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA DYFUZJI WILGOCI W DREWIE JODŁY GÓRSKIEJ

Jadwiga ŚWIRSKA-PERKOWSKA, Kamil JEŹ
Politechnika Opolska, Wydział Budownictwa i Architektury, Opole, Polska

Słowa kluczowe: wilgoć, jodła górska, współczynnik dyfuzji, minimalizacja funkcji błędu.

1. Wprowadzenie

Wilgoć zawarta w drewnie ma znaczący wpływ na szereg jego własności, w tym na wytrzymałość, stabilność wymiarową, trwałość i podatność na korozję biologiczną. Stopień zawilgocenia drewna zależy między innymi od wartości współczynnika dyfuzji wilgoci, który to współczynnik stanowi jeden z podstawowych parametrów drewna.

Ze względu na swoją wagę, problematyka związana z wyznaczaniem współczynników dyfuzji wilgoci w drewnie jest szeroko poruszana w literaturze przedmiotu. Stosowane najczęściej metody wyznaczania współczynnika dyfuzji wilgoci można podzielić na dwie główne grupy: stacjonarne i niestacjonarne.

Spośród metod stacjonarnych najbardziej popularna jest metoda *cup*, która zastosowana została między innymi w pracach [2, 5]. Wśród najczęściej stosowanych obecnie metod niestacjonarnych, bazujących na pomiarach sorpcji lub desorpcji wilgoci, wyróżnić można metodę minimalizacji funkcji celu (w postaci sumy kwadratów różnic pomiędzy wielkościami zmierzonymi, a wyznaczonymi na podstawie przyjętego modelu) [7, 8, 9, 10] oraz metody odwrotne [1, 3, 4]. W pierwszej z tych metod mierzone są jedynie zmiany masy całkowitej próbki w trakcie procesu zawilgacania lub wysychania, a w drugiej wymagana jest znajomość rozkładu wilgoci w próbce w różnych chwilach trwania procesu. Rozkłady te otrzymuje się albo na drodze plasterkowania próbki i ważenia poszczególnych kawałków [1], albo z wykorzystaniem bardziej zaawansowanych technik pomiarowych takich jak tomografia komputerowa [3] lub rezonans magnetyczny [4].

W przypadku prac, w których mierzone są rozkłady wilgoci w próbkach w poszczególnych chwilach trwania procesu, automatycznie otrzymuje się wartości poszukiwanych współczynników w zależności od współrzędnych przestrzennych, a więc także w funkcji zawilgocenia materiału. W przypadku metod bazujących na pomiarach masy całkowitej próbek i minimalizacji funkcji błędu konieczne jest założenie a priori postaci zależności funkcyjnej współczynnika dyfuzji wilgoci od wilgotności materiału.

W niniejszej pracy wyznaczono zmienność współczynnika dyfuzji wilgoci w drewnie jodły górskiej (*Abies lasiocarpa*) na podstawie znajomości rozkładów wilgoci w próbkach drewna, które uzyskano w trakcie procesu desorpcji i zamieszczono w pracy Cai [1]. Współczynnika dyfuzji wilgoci poszukiwano na drodze minimalizacji funkcji błędu przy założeniu warunków brzegowych III-go rodzaju i stałym współczynnikiem przejmowania wilgoci na brzegach próbki. Analizowano dwa przypadki zmienności współczynnika dyfuzji

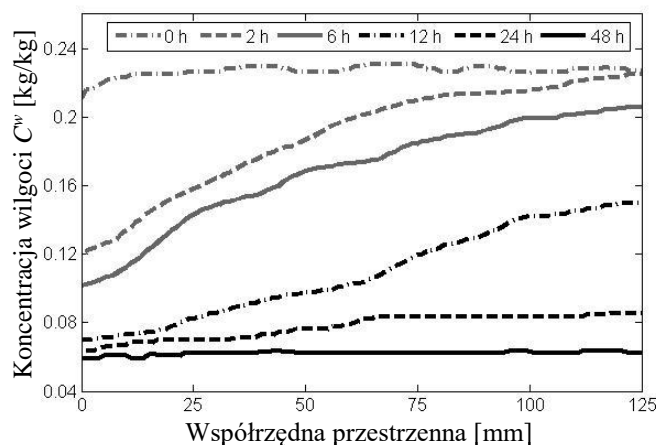
wraz z wilgotnością materiału, a mianowicie w postaci funkcji stałej i kwadratowej. Funkcja błędu opisywała różnicę pomiędzy obliczonymi i zmierzonymi rozkładami wilgoci w próbce w poszczególnych chwilach trwania procesu desorpcji. Uzyskane wyniki porównano z wynikami zaprezentowanymi w pracy [1].

2. Badania eksperymentalne

W pracy [1] przedstawione zostały wyniki badań procesu desorpcji próbek jodły górskiej (*Abies lasiocarpa*) w postaci krzywych rozkładu koncentracji wilgoci w próbkach w poszczególnych chwilach trwania procesu, tzn. po: 0, 2, 6, 12, 24 i 48 godzinach od momentu rozpoczęcia badania.

Eksperyment realizowany był w ten sposób, że 6 desek o szerokości 50 mm i grubości 25 mm pokryto dwoma warstwami żywicy epoksydowej na pobocznicach, tak aby wymusić ruch wilgoci jedynie w kierunku poprzecznym do włókien. Następnie deski sezonowano i doprowadzono do wilgotności równowagowej w temperaturze 20°C i przy wilgotności względnej powietrza 95% (23% EMC). Tak przygotowane próbki przełożono do komory klimatycznej, w której utrzymywano stałą temperaturę $60 \pm 1^\circ\text{C}$ i wilgotność względną $50 \pm 1\%$.

Aby określić rozkład wilgotności w próbkach w poszczególnych chwilach trwania procesu desorpcji, co jakiś czas wyjmowano pojedyncze deski z komory i wycinano z ich środka po dwie próbki o wymiarach 25 mm × 25 mm × 25 mm. Następnie za pomocą mikrotomu każdą próbkę dzielono na 16 sekcji. Ponieważ blok musiał być bezpiecznie utrzymywany w mikrotomie, tylko połowę każdej próbki podzielono na kawałki. W przypadku każdej z dwóch próbek – odpowiednio raz z góry, a raz z dołu w kierunku środka, zostało odciętych 16 plasterków (o grubości około 0,78 mm). Natychmiast po pokrojeniu każdy plasterzek ważono, a następnie suszono w piecu w temperaturze $103 \pm 2^\circ\text{C}$, w celu określenia jego masy w stanie suchym. W ten sposób otrzymano rozkłady koncentracji wilgoci w próbkach odpowiednio po: 0, 2, 6, 12, 24 i 48 godzinach od momentu rozpoczęcia badania.



Rys. 1. Rozkłady koncentracji wilgoci w próbce w poszczególnych chwilach [1].
Fig. 1. Distributions of moisture concentration in the sample at various time points [1].

3. Model matematyczny

W przypadku jednowymiarowego przepływu wilgoci, który to przepływ realizowany był podczas przedstawianego w pracy [1] eksperymentu, zdyskretyzowane zgodnie z ideą MRS równanie dyfuzji wilgoci przyjmie formę zależności [11]

$$\frac{C_{i,j}^w - C_{i,j-1}^w}{\Delta t} = \frac{D_{i+1,j-1}^T - D_{i-1,j-1}^T}{2\Delta x} \frac{C_{i+1,j-1}^w - C_{i-1,j-1}^w}{2\Delta x} + D_{i,j-1}^T \frac{C_{i+1,j-1}^w - 2C_{i,j-1}^w + C_{i-1,j-1}^w}{(\Delta x)^2}, \quad (1)$$

gdzie dolne wskaźniki i oraz j odnoszą się odpowiednio do węzła przestrzennego i punktu czasowego dyskretyzowanej przestrzeni (x,t) .

Warunek początkowy opisujący będzie jednorodny rozkład wilgoci w próbce

$$C_{i,0}^w = C_{i,0}^w, \quad (2)$$

natomiast warunki brzegowe na niezaizolowanej (desorbującej) powierzchni próbki oraz na jej powierzchni środkowej dane będą zależnościami [11]

$$-D_{0,j}^T \frac{C_{1,j}^w - C_{-1,j}^w}{2\Delta x} = \kappa^T (C_{\infty}^w - C_{0,j}^w) \Rightarrow C_{-1,j}^w = C_{1,j}^w \frac{2\kappa^T \Delta x}{D_{0,j}^T} (C_{\infty}^w - C_{0,j}^w), \quad (3)$$

$$-D_{n,j}^T \frac{C_{n+1,j}^w - C_{n-1,j}^w}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow C_{n+1,j}^w = C_{n-1,j}^w, \quad (4)$$

gdzie n jest indeksem węzła w środku próbki, a -1 i $n+1$ są indeksami węzłów fikcyjnych, które leżą poza analizowanym odcinkiem próbki w odległości Δx od jego końców. Warunek (4) opisuje zerowy strumień wilgoci w środkowej części próbki wynikający z symetrii zadania.

4. Obliczenia numeryczne

W pracy rozważano dwa przypadki zmienności współczynnika dyfuzji wilgoci wraz z wilgotnością materiału, to jest w postaci stałej i funkcji kwadratowej

$$D^T(C^w) = D_0^T, \quad D^T(C^w) = a + bC^w + c(C^w)^2. \quad (5)$$

W obu przypadkach założono, że współczynnik przejmowania masy na desorbujących powierzchniach próbki jest wielkością stałą ($\kappa^T = \kappa_0^T = const.$).

Wartości współczynników w funkcjach (5) każdorazowo dobierano w ten sposób, aby obliczone zgodnie z równaniami (1)-(4) rozkłady zawartości wilgoci w próbce były jak najbardziej zbliżone do wyników badań eksperymentalnych przedstawionych w pracy [1] (rys. 1). Stopień dopasowania danego zestawu współczynników do danych doświadczalnych oceniano na podstawie wartości funkcji F będącej sumą bezwzględnych odchyleń kwadratowych pomiędzy wartościami zmierzonymi a obliczonymi

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n (C_{i,j}^{we} - C_{i,j}^{wo}(\mathbf{x}))^2, \quad (6)$$

gdzie: $C_{i,j}^{we}$, $C_{i,j}^{wo}$, p , n to odpowiednio: zmierzona i obliczona zawartość wilgoci w węzle przestrzennym i w chwili j , liczba pomiarów rozkładów wilgotności w próbce, liczba węzłów przestrzennych. Zmienne zwarte w wektorze \mathbf{x} odpowiadają bieżącym wartościom poszukiwanych współczynników materiałowych. W pierwszej kolejności znajdowano wartość stałego współczynnika dyfuzji wilgoci oraz odpowiadającą mu wartość współczynnika przejmowania wilgoci. Obliczając rozkład koncentracji wilgoci w próbce, wykorzystywano metodę różnic skończonych (MRS), a dokonując minimalizacji funkcji F używano algorytmu optymalizacyjnego Levenberga-Marquardta, którego punkt startowy dobrano na podstawie danych zawartych w pracy [1]. Wykorzystano również dane otrzymane w przypadku drewna sosny zwyczajnej, zamieszczone w artykule [11]. W przypadku obu zastosowany punktów startowych otrzymano takie same wartości współczynników D_o^T i κ_o^T . Stosując metodę MRS, w każdej próbce wprowadzano 26 węzłów przestrzennych. W dalszej kolejności obliczano współczynniki w funkcji kwadratowej $D^T(C^w)$ oraz odpowiadający jej współczynnik κ^T . W tym przypadku punktem startowym algorytmu Levenberga-Marquardta był punkt o współrzędnych $[D_o^T, 0, 0, \kappa_o^T]$, gdzie kolejne składowe odpowiadają bieżącym wartościom parametrów: a , b , c i κ^T . Wykorzystywano więc dane otrzymane z rozwiązania zadania poprzedniego. Wszystkie algorytmy obliczeniowe zostały napisane przez autorów pracy w środowisku programowym MATLAB.

Poprawność uzyskanych wyników oceniano na podstawie dopasowania krzywych obliczeniowych do krzywych eksperymentalnych przy wykorzystaniu globalnego błędu dopasowania, wyznaczonego zgodnie z zależnością

$$e = \frac{\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n (C_{i,j}^{we} - C_{i,j}^{wo})^2}{\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n (C_{i,j}^{we})^2} \cdot 100\%. \quad (7)$$

5. Wyniki obliczeń

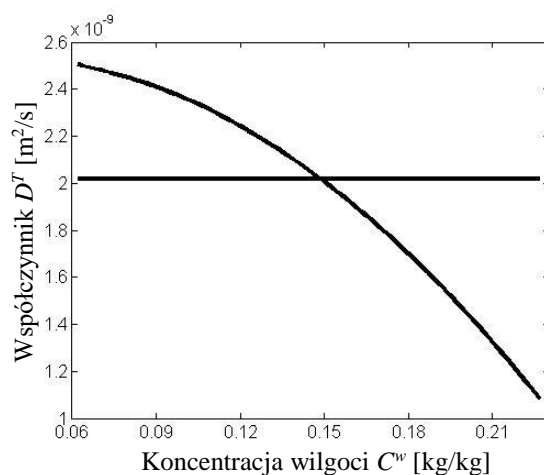
W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano wartości współczynników występujących w funkcjach (5) oraz odpowiadające tym przypadkom zmienności $D^T(C^w)$ wartości współczynnika przejmowania masy na brzegu próbki κ^T . Wielkości te zestawiono w tabelicy 1, w której zamieszczono dodatkowo wartości błędu dopasowania e krzywych obliczeniowych do rozkładów eksperymentalnych.

Tablica 1. Wyniki obliczeń.

Model	D_o^T/a [m ² /s]	b [(m ² ·kg) /(s·kg)]	c [(m ² ·kg ²) /(s·kg ²)]	κ^T [m/s]	e [%]
stały	$2,02 \cdot 10^{-9}$	–	–	$8,52 \cdot 10^{-7}$	5,86
kwadratowy	$2,49 \cdot 10^{-9}$	$2,54 \cdot 10^{-9}$	$-3,86 \cdot 10^{-8}$	$8,27 \cdot 10^{-7}$	5,59

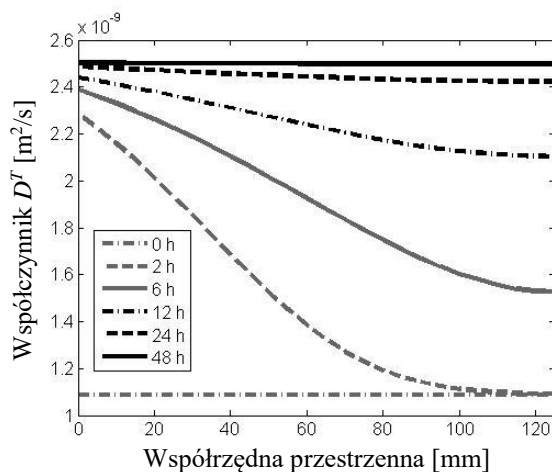
Przebieg funkcji $D^T(C^w)$ o współczynnikach jak w tabelicy 1 pokazano na rys. 2. Dodatkowo, na rys. 3, zilustrowano zmienność współczynnika dyfuzji po grubości próbki w poszczególnych chwilach trwania eksperymentu. Na rys. 4 i 5 przedstawiono wykresy

z dopasowaniem krzywych obliczeniowych do krzywych eksperymentalnych zawartych w pracy [1] – zarówno w przypadku stałego jak i zmiennego współczynnika dyfuzji wilgoci.



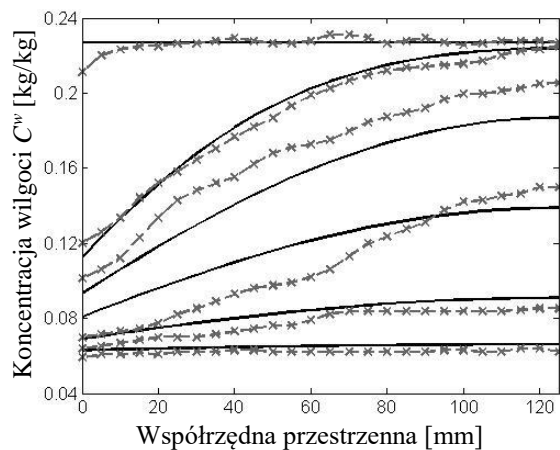
Rys. 2. Zmienność współczynnika dyfuzji wilgoci w przypadku funkcji stałej i kwadratowej.

Fig. 2. Variability of moisture diffusion coefficient in the case of a constant and square function.



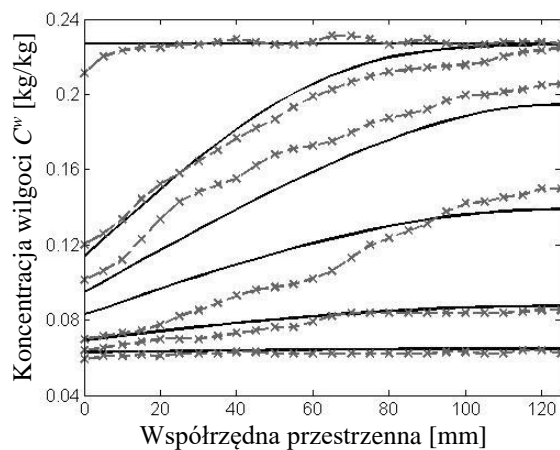
Rys. 3. Zmienność współczynnika dyfuzji wilgoci w poprzek próbki.

Fig. 3. Variability of moisture diffusion coefficient across the sample.



Rys. 4. Porównanie eksperymentalnych (linie z krzyżkami) i obliczeniowych (linie ciągłe) rozkładów koncentracji wilgoci w przypadku stałego D^T . Kolejne krzywe, począwszy od góry, odpowiadają chwilom: 0h, 2h, 6h, 12h, 24h i 48h.

Fig. 4. A comparison of experimental (lines with crosses) and computational (solid lines) distributions of moisture concentration in the case of the constant D^T . The subsequent curves, starting from the top, correspond to the moments: 0h, 2h, 6h, 12h, 24h and 48h.



Rys. 5. Porównanie eksperymentalnych (linie z krzyżkami) i obliczeniowych (linie ciągłe) rozkładów koncentracji wilgoci w przypadku kwadratowego modelu D^T . Kolejne krzywe, począwszy od góry, odpowiadają chwilom: 0h, 2h, 6h, 12h, 24h i 48h.

Fig. 5. A comparison of experimental (lines with crosses) and computational (solid lines) distributions of moisture concentration in the case of the quadratic model of D^T .

The subsequent curves, starting from the top, correspond to the moments:
0h, 2h, 6h, 12h, 24h and 48h.

6. Podsumowanie

Jak wynika z tablicy 1, założenie kwadratowej zmienności współczynnika dyfuzji wilgoci wraz z koncentracją wilgoci w materiale spowodowało zmniejszenie globalnego błędu dopasowania krzywych obliczeniowych do krzywych eksperymentalnych jedynie o niecałe 0,2%. W obu rozważanych przypadkach błąd jest na poziomie 6%, co potwierdza poprawność zastosowanej procedury obliczeniowej. Najprawdopodobniej lepsze dopasowanie krzywych uzyskano by przy założeniu liniowej zmienności współczynnika przejmowania masy $\kappa^T(C^w)$ wraz z wilgotnością materiału.

Jak wynika z rys. 2, współczynnik dyfuzji maleje monotonicznie wraz z zawartością wody w materiale. Taki przebieg wykresów $D^T(C^w)$ świadczy o dominującej roli dyfuzji pary wodnej w całokształcie procesu przenoszenia wilgoci w analizowanym przypadku. Przeczy to powszechnej opinii, że w przypadku dyfuzji w kierunkach poprzecznych do włókien proces ten zdominowany jest przez dyfuzję wody związanej, a jego intensywność rośnie wraz ze wzrostem wilgotności materiału [6].

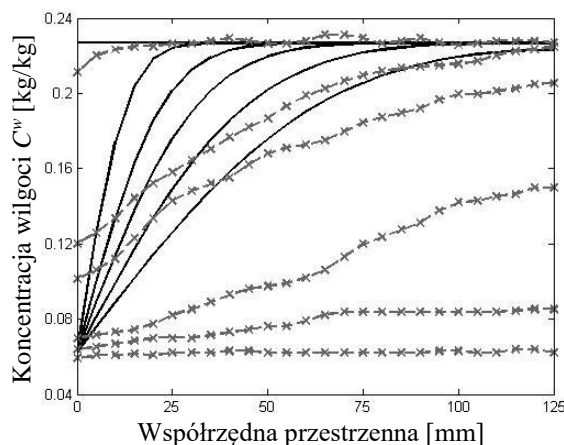
W pracy [1] rozkład przestrzenny współczynnika dyfuzji wilgoci w poszczególnych chwilach trwania procesu (0h, 2h, 6h, 12h, 24h i 48h) obliczony został wprost ze zdyskretyzowanego (zgodnie z założeniami metody różnic skończonych) równania dyfuzji, w którym jako niewiadome potraktowano wartości współczynnika $D_{i,j}^T$, natomiast wartości $C_{i,j}^w$ przyjęto na podstawie eksperymentu. Użyto przy tym schematu jawnego i założono, że współczynnik przejmowania masy jest znany i równy

$$\kappa^T = \frac{h_f}{\rho_a c_{pa}} \left(\frac{Pr}{Sc} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (8)$$

przy czym h_f wynosi 2,4 W/(m²·K). Podstawiając do powyższego równania wartości jak dla suchego powietrza o temperaturze 60°C otrzymamy wartość κ^T równą $2,48 \cdot 10^{-3}$ m/s. Tak wysoki współczynnik przejmowania masy oznacza, praktycznie rzecz biorąc, występowanie na brzegu próbki warunków brzegowych I-go rodzaju, czyli natychmiastowe wyrównanie stężenia pary wodnej w powietrzu otoczenia i w porach materiału.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń autor pracy [1] otrzymał średni współczynnik dyfuzji wilgoci w drewnie D_o^T o wartości 0,253 mm²/h ($7,028 \cdot 10^{-11}$ m²/s). Jest to wartość o 2 rzędy niższa w stosunku do wartości uzyskanej przez autorów niniejszego artykułu. Na rys. 6 przedstawiono porównanie eksperymentalnych rozkładów koncentracji wilgoci w próbce z rozkładami obliczonymi (przy wykorzystaniu metody MRS) z uwzględnieniem wartości D_o^T i κ^T otrzymanych w artykule [1]. Należy tu zauważyć, że omawiana praca nie zawiera takiego porównania.

Jak widać na rys. 6, wyznaczony w artykule [1] współczynnik dyfuzji wilgoci i przyjęta wartość współczynnika przejmowania masy dają rozkłady koncentracji wilgoci rozbieżne z eksperymentem (błąd dopasowania wynosi 54%). Niewłaściwa wartość współczynnika D_o^T jest zapewne wynikiem zastosowania schematu jawnego MRS, który nakłada poważne ograniczenia na długość kroku czasowego. Tymczasem odstępy czasu pomiędzy poszczególnymi pomiarami były dość długie i nieregularne, dlatego przyjęta metodyka musiała doprowadzić do błędnych wyników.



Rys. 6. Porównanie eksperymentalnych (linie z krzyżykami) i obliczeniowych (linie ciągłe) rozkładów koncentracji wilgoci w przypadku współczynników jak w pracy [1].

Fig. 6. A comparison of experimental (lines with crosses) and computational (solid lines) distributions of moisture concentration in the case of coefficients as in work [1].

Oznaczenia symboli

- c_{pa} – ciepło właściwe powietrza, specific heat capacity of air, [J/(kg·K)];
- C^w – koncentracja wilgoci w odniesieniu do suchej masy materiału, moisture concentration related to the mass of dry material, [kg/kg];
- D^T – współczynnik dyfuzji wilgoci w kierunku prostopadłym do włókien, moisture diffusion coefficient in the perpendicular direction to the fibers, [m²/s];
- F – funkcja dopasowania, fitting function, [-];
- e – globalny błąd dopasowania, global fitting error, [%];
- h_f – współczynnik transportu ciepła, heat transfer coefficient, [W/(m²·K)];
- Pr – liczba Prandtla, Prandtl number, [-];
- Sc – liczba Schmidta, Schmidt number, [-];
- t – czas, time, [s];
- x – współrzędna przestrzenna, spatial coordinate, [m];
- Δ – przyrost wielkości, increment of quantity;
- κ^T – współczynnik przejmowania masy, coefficient of mass surface emission, [m/s];
- ρ_a – gęstość powietrza, density of air, [kg/m³].

Literatura

- [1] Cai, L.: Determination of diffusion coefficients for sub-alpine fir, *Wood Science and Technology*, 39 (2005), 153-162.
- [2] Čermák, P., Trcala, M.: Influence of uncertainly in diffusion coefficients on moisture field during wood drying, *Int J Heat and Mass Transfer*, 55 (2012), 7709-7717.
- [3] Danvind, J., Ekevad, M.: Local water vapour diffusion coefficient when drying Norway spruce sapwood, *Journal of Wood Science*, 52 (2006), 195-201.

- [4] Dvinskikh, S.V., Henrikssn, M., Mendicino, A.L., Fortino, S., Toratti, T.: NMR imaging study and multi-Fickian numerical simulation of moisture transfer in Norway spruce samples, *Engineering Structures*, 33 (2011), 3079-3086.
- [5] Eitelberger, J., Svensson, S.: The sorption behaviour of wood studies by means of an improved cup method, *Transport in Porous Media*, 92 (2012), 321-335.
- [6] Kang, W., Chung, W.Y., Eom, C., Yco, H.: Some considerations in heterogeneous nonisothermal transport models for wood: a numerical study, *Journal of Wood Science* 54 (2008), 267-277.
- [7] Olek, W., Perré, P., Weres, J.: Implementation of a relaxation equilibrium term in the convective boundary condition for a better representation of the transient bound water diffusion in wood, *Wood Science and Technology*, 45 (2011), 677-691.
- [8] Sargent, R., Riley, S., Schöettle, L.: Measurement of dynamic sorption behaviour of small specimens of *pinus radiata* – influence of wood type and moisture content on diffusion rate, *Maderas Ciencia y Tecnologia*, 12, 1 (2010), 93-103.
- [9] Silva, W.P., Silva, L.D., Oliveira Farias, V.S., Silva, C.M.D.P.S., Ataíde, J.S.P.: Three-dimensional numerical analysis of water transfer in wood: determination of an expression for the effective mass diffusivity, *Wood Science and Technology*, 47 (2013), 897-912.
- [10] Silva, W.P., Silva, L.D., Silva, C.M.D.P.S., Nascimento, P.L.: Optimization and simulation of drying processes using diffusion models: application to wood drying using forced air at low temperature, *Wood Science and Technology*, 45 (2011), 787-800.
- [11] Świrska-Perkowska, J., Gajda, M.: Wyznaczenie współczynnika dyfuzji wilgoci w drewnie sosny zwyczajnej, *Roczniki Inżynierii Budowlanej O/PAN Katowice*, 15 (2015), 17-28.

DETERMINATION OF THE MOISTURE DIFFUSION COEFFICIENT IN WOOD OF SUB-ALPINE FIR

Summary

This work presents results of calculations of diffusion coefficient and surface emission coefficient for wood of sub-alpine fir (*Abies lasiocarpa*) in the case of diffusion in the transverse direction to fibres. The results of moisture desorption in the samples of sub-alpine fir, presented in the article by Cai [1] and realized by slicing samples and weighing individual slices, were employed in the work. The values of moisture diffusion coefficients and mass surface emission coefficient were found using the method of minimizing the fitting function, assuming boundary conditions of the second and third kind with constant surface emission coefficient on the corresponding edges of samples. Moreover, two cases of variations of the moisture diffusion coefficient together with moisture content of the material were analysed each time: in the form of a constant and quadratic function. The obtained results were compared with the results presented in the paper [1].

